Raport stiintific

privind implementarea proiectului in perioada ianuarie – decembrie 2012

In perioada ianuarie-decembrie 2012 s-au elaborat 10 lucrari (vezi bibliografia) in cadrul proiectului ID-PCE-2011-1023 ale caror rezultate le vom descrie in cele ce urmeaza. Dintre acestea 3 au aparut deja, 4 au fost acceptate spre publicare, iar 3 au fost submise spre publicare, ele fiind momentan accesibile online pe arxiv.org. Cele 10 lucrari elaborate sunt in tema contractului de cercetare, 6 dintre ele abordand conjectura lui Stanley, un subiect de cercetare important in cercetarea stiintifica de azi. De asemenea celelalte 4 lucrari care abordeaza teme de combinatorica prin metode de algebra comutativa reprezinta contributii importante ale membrilor grantului la cercetarea mondiala actuala.

Pentru descrierea rezultatelor obtinute in aceste articole avem nevoie de introducerea urmatoarei notatii: S reprezinta inelul polinoamelor peste un corp K in nedeterminatele x_1,…, x_n.

Lucrarile 8, 9 si 10 prezinta rezultate importante in directia demonstrarii conjecturii lui Stanley pentru ideale monomiale libere de patrate. In lucrarea 8, se considera un ideal monomial generat de r monoame libere de patrate de grad d. Se arata ca daca r este mai mare sau egal (daca I nu este principal) decat numarul de monoame libere de patrate ale lui I de grad d+1, atunci depth S/I = d. Daca J este un ideal nenul strict continut in I, generat de monoame libere de patrate de grad mai mare sau egal decat d+1, si r este mai mare decat numarul de monoame libere de patrate ale lui I/J de grad d+1 (sau mai general sdepth I/J=d) atunci depth I/J=d. In particular, obtinem in situatiile descrise mai sus un rezultat pozitiv pentru conjectura lui Stanley. Rezultatul principal (Teorema 2.2) da o conditie suficienta pentru ca depth I/J = d si anume atunci cand ρ_d*(I) >* ρ_{d+1}*(I)* $-\rho_{d+1}$*(J), unde I si J sunt ideale monomiale in S, iar* ρ_d*(I) reprezinta numarul tuturor monoamelor libere de patrate de grad d ale lui I. Demonstratia acestui rezultat foloseste omologie Koszul, o tehnica noua de abordare a acestei conjecturi, introdusa de autor. Mai mult acesta arata ca abordarea conjecturii cu omologie Koszul pare cea mai buna strategie care poate fi abordata in cazurile particulare ale conjecturii considerate de autor. Daca I este generat de cel putin* ρ_{d+1}*(I) monoame libere de patrate de grad d, atunci se demonstreaza in Corolarul 3.4 ca depth I=d. Acest lucru generalizeaza un rezultat precedent al autorului, care a fost punctul de plecare pentru aceasta tema de cercetare. Mai mult, se arata ca aceste conditii impuse sunt consecinte ale faptului ca sdepth I/J=d, ceea ce inseamna ca in aceasta situatie este adevarata conjectura lui Stanley. In lucrarea 9, autorul generalizeaza Teorema 2.2 din lucrarea 8 in modul urmator. Se considera situatia in care I si J sunt doua ideale monomiale libere de patrate astfel incat J este strict continut in I si I este generat de monoame de grad* *mai mare sau egal decat d, iar J este generat de monoame de grad mai mare sau egal cu d+1. In rezultatul principal al articolului, Teorema 1.3, se arata ca (in anumite conditii) se poate calcula depth I/J ceea ce ar putea implica o demonstratie a conjecturii lui Stanley pentru cazul idealelor monomiale libere de patrate.*

In lucrarea 10 sunt demonstrate cateva cazuri noi in care conjectura lui Stanley este adevarata. Mai precis, se considera cazul in care I si J sunt doua ideale monomiale libere de patrate astfel incat J este strict continut in I, I este generat in grad ≥ 1, iar J in grad ≥ 2 . In plus, daca I contine exact o variabila, iar ceilalti generatori sunt de grad mai mare sau egal cu 2 atunci sdepth I/J$\leq$ 2 implica depth I/J $\leq$2 , ceea ce inseamna ca este adevarata conjectura lui Stanley. Pentru demonstrarea acestui rezultat (Teorema 1.10), autorii extind tehnici si rezultate deja folosite in lucrarile 8 si 9.

Lucrarile 2,3 si 4 sunt centrate de asemenea pe analizarea unor cazuri particulare legate de conjectura Stanley. In lucrarea 2, se demonstreaza ca daca I este un ideal monomial intersectie completa atunci conjectura lui Stanley are loc pentru S/I si I. Acest rezultat reprezinta o generalizare non-triviala a rezultatelor cunoscute pentru ideale monomiale intersectie completa. In lucrarea 3, autorul calculeaza margini pentru Stanley depth-ul lui I+J, intersectia lui I cu J, S/(I+J) si S/(I:J), unde I si J sunt ideale monomiale ale lui S. In lucrarea 4 sunt date margini exacte pentru Stanley depth-ul catului I/J, pentru doua ideale monomiale intersectie completa I si J din S. Ca un caz particular, este calculat Stanley depth-ul pentru caturile a doua ideale monomiale ireductibile. De asemenea, sunt demonstrate cateva inegalitati legate de Stanley depth.

Este bine cunoscut ca, pentru un ideal monomial I din S, numerele Betti descresc la trecerea la radicalul lui I. In particular, depth-ul creste prin trecerea de la un ideal la radicalul sau. In lucrarea 1 din bibliografie sunt caracterizate idealele monomiale nemixtate pentru care depth (S/I)=depth(S/rad(I)), cu alte cuvinte cele care au depth maximal. Aceasta caracterizare extinde rezultate din lucrarea scrisa de N. C. Minh, N. V. Trung, Cohen-Macaulayness of monomial ideals and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals, Adv. Math. 226 (2011), 1285-1306. In plus, ca aplicatie la rezultatul de mai sus, este caracterizata o clasa de complexe simpliciale pure pe care autorii le-au numit "depth rigid". Un complex simplicial Δ are depth rigid daca orice ideal nemixtat I al carui radical coincide cu idealul Stanley-Reisner al lui Δ are depth-ul maximal. Complexele simpliciale cu depth rigid generalizeaza in mod natural complexele simpliciale studiate de J. Herzog, Y. Takayama, N. Terai in lucrarea "On the radical of a monomial ideal" (2005). De asemenea, este aratat ca daca un complex simplicial are depth rigid peste un corp de caracteristica 0, atunci aceasta proprietate se pastreaza peste corpuri de orice caracteristica.

In articolul 5 se studiaza idealele generate de m-minorii unei matrice m x n de nedeterminate (m≤n). Generatorii acestui ideal sunt asociati fatetelor unui complex simplicial Δ pur de dimensiune m-1. Din acest motiv, aceste ideale sunt numite "determinantal facet ideals". In cazul cand m=2, deci cand Δ este un graf, idealul determinantal fateta J_Δ este ideal binomial muchie ("binomial edge ideal"). Idealele binomiale asociate unui graf au fost introduse recent in lucrarea J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdottir, T. Kahle, J. Rauh, Binomial edge ideals and conditional independence statements, Adv. Appl. Math. 45 (2010), 317–333. In ultimii 3 ani ele au fost studiate intens. Structura idealelor determinantale fateta pentru 3≤m este mult mai complexa decat cea a idealelor binomiale muchie. In lucrarea 5 sunt obtinute rezultate privind bazele Groebner si proprietatile de primalitate ale acestor ideale. Se arata ca un ideal determinantal fateta are proprietatea ca generatorii sai formeaza baza Groebner relativ la ordonarea lexicografica indusa de ordinea naturala a nedeterminatelor daca si numai daca complexul simplicial asociat este inchis. Pentru un complex simplicial Δ inchis, se arata ca idealul determinantal asociat J_Δ este Cohen-Macaulay, iar K-algebra generata de generatorii lui J_Δ este Gorenstein. Cand Δ este un complex inchis, autorii au gasit o conditie necesara pentru primalitatea idealului J_Δ, conditie care se exprima in functie de proprietatile combinatoriale ale lui Δ. In plus, in conditii suplimentare asupra lui Δ, sunt date si conditii suficiente de primalitate a idealului determinantal asociat.

In lucrarea 6 se studiaza o clasa de ideale binomiale asociate matricelor patratice. Data X o matrice patratica de nedeterminate de ordinul n si un graf simplu G pe multimea de varfuri {1,...,n}, se considera idealul P_G generat de minorii diagonali de ordin 2 ai lui X formati cu elementele de la intersectia liniilor si coloanelor i si j, unde {i,j} este muchie in graful G. Se determina cate o baza Groebner pentru acest ideal pentru diverse ordonari monomiale. Se arata ca P_G este un ideal prim si intersectie completa si se calculeaza grupul claselor de divizori pentru domeniul normal K[X]/ P_G. In plus se demonstreaza ca acest grup este liber si se exprima rangul sau in functie de graful G. Cu ajutorul acestor ideale, se arata ca se pot obtine inele normale cu grupul divizorilor liber de orice rang.

In lucrarea 7, se defineste un functor r de la categoria modulelor pozitiv definite la categoria modulelor libere de patrate care joaca un rol similar cu luarea radicalului pentru ideale monomiale. Se extind multe rezultate cunoscute din teoria idealelor monomiale la modulele multigraduate. De exemplu, se stia ca daca radicalul unui ideal monomial I este (secvential sau generalizat) Cohen-Macaulay sau Buchsbaum, atunci I are aceeasi proprietate [H. Herzog, Y. Takayama, N. Terai, On the radical of a monomial ideal, Arch. Math. 85 (2005), 397-408]. In aceasta lucrare se demonstreaza ca aceste proprietati se extind la module multigraduate pozitiv definite. Mai precis, se arata ca prin trecerea de la* *un modul multigraduat pozitiv definit la “radicalul” sau numerele Betti nu cresc. Acesta este un fenomen similar cazului idealelor monomiale care, in particular, implica faptul ca depth-ul creste de la un modul la radicalul sau. In schimb, asa cum se arata in articol, dimensiunea Krull descreste prin trecerea la radical. Spre deosebire de cazul monomial, exista exemple care arata ca in cazul modulelor multigraduate dimensiunea Krull a radicalului este strict mai mica decat cea a modulului. Folosind inegalitatile de mai sus se obtine ca proprietatea unui modul multigraduat pozitiv definit de a fi (secvential) Cohen-Macaulay se propaga si la radicalul sau.*

Mai mult, se studiaza conexiunile dintre functoul r si functorii: Ext, Dualul Alexander (introdus si studiat mai intai in [E. Miller, The Alexander duality functors and local duality with monomial support, J. Algebra 231 (2000), 180-234]) si functorul Auslander-Reiten translate [M. Brun, G. Floystad, The Auslander-Reiten translate on monomial rings, Adv. Math. 226(2011), 952-991]. Legatura dintre functorul r* si functorul Ext permite autorilor sa demonstreze ca in conditiile in care M si r*(M) au aceeasi dimensiune Krull, atunci M este Cohen-Macaulay generalizat daca si numai daca r*(M) are aceeasi proprietate si ca daca M este Buchsbaum, atunci si radicalul sau este Buchsbaum.*

In final, am vrea sa precizam ca activitatea de cercetare depusa anul acesta de membri grantului s-a concretizat prin publicarea sau acceptarea spre publicare a sapte articole (vezi 1,2,3,5,6,8,9), dintre care 5 fiind in jurnale prestigioase de specialitate (1,5,6,8,9), ceea ce reprezinta o foarte buna activitate stiintifica in cadrul acestui grant.

In plus, Dorin Popescu, Viviana Ene, Bogdan Ichim, Dumitru Stamate si Mircea Cimpoeas au fost organizatorii de anul acesta ai editiei 20 a traditionalei Scoli Nationale de Algebra, “Discrete invariants in commutative algebra and in algebraic geometry”, tinuta la Mangalia in perioada 02.09.2012-08.09.2012, si care a avut parte de o deosebita participare externa (11 profesori invitati) si un puternic impact stiintific. De asemenea, Viviana Ene, Bogdan Ichim, si Dumitru Stamate au contribuit cu cate o conferinta la aceasta manifestare stiintifica. In afara diseminarii rezultatelor in cadrul Scolii Nationale de Algebra membrii grantului au participat si la conferinte in strainatate. Bogdan Ichim a tinut o prezentare cu titlul "Introduction to Normaliz" la Universitatea Rostock pe data de 09-05-2012 si o prezentare cu titlul "How to compute the multigraded Hilbert depth of a module" la Universitatea Osnabruck pe data de 20-11-2012. De asemenea Dorin Popescu a tinut o prezentare la Universitatea din Kaiserslautern in luna iulie cu titlul “Rezultate si contributii noi la conjectura lui Stanley”. Un alt membru al grantului, Viviana Ene, s-a deplasat in Germania, la Universitatea Essen, pentru continuarea unui proiect de cercetare comun initiat in colaborare cu Prof. Jurgen Herzog.

Bibliografie:

1. A. Aslam, V. Ene, *Simplicial complexes with rigid depth*, **Arch. Math**. 99 (4) (2012), 315-325.

2. M. Cimpoeas, The Stanley conjecture on monomial almost complete intersection ideals, ***Bull. Soc. Math. Roumanie****. vol 55(103), no. 1 (2012).*

3. M. Cimpoeas, Several inequalities regarding Stanley depth, Romanian Journal of Mathematics and Computer Sciences, vol 2, no. 1(2012).

4. M. Cimpoeas, Stanley depth of quotient of monomial complete intersection ideals, arxiv:1210.2214v1, submis.

5. V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, F. Mohammadi, *Determinantal facet ideals,* acceptat spre publicare in **Michigan Math. J**.

6. V. Ene, A. Qureshi, *Ideals generated by diagonal 2-minors,* acceptat spre publicare in **Comm. Algebra**.

7. V. Ene, R. Okazaki, *On the radical of muligraded modules, arXiv:1210.2026v1, submis.*

8. D. Popescu, Depth of factors of square free monomial ideals, acceptat spre publicare in ***Proceedings AMS****, arXiv:AC/1110.1963.*

9. D. Popescu, Upper bounds of depth of monomial ideals, acceptat spre publicare in ***J. Commutative Alg.****, arXiv:AC/1206.3977.*

10. D. Popescu, A.Zarojanu, Depth of some square free monomial ideals, arXiv: 1211.0842v1, submis.

Director proiect,

Popescu Dorin-Mihail